Exercice 2

X compte le nbre de boules dans A ie

$X \sim \mathcal{B}(n=2, p=\frac{1}{2})$.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$P(X=0) = C_2^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = C_2^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = C_2^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{4}$.

On a également $Y(\Omega) = \{1 ; 2\}$

1- Calculons la loi du couple (X,Y) et $Cov(X,Y)$.

La loi du couple est donnée par:

Y \ X	0	1	2
1	1/4	0	1/4
2	0	1/2	0

$$\boxed{Cov(X,Y) = \sum_{i=0}^{i} x_i \cdot y_i \cdot P(x_i, y_i) - \bar{X}\bar{Y}}$$

Or les lois marginales de X et Y sont:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4

$Y=y_i$	1	2
$P(Y=y_i)$	1/2	1/2

$\bar{X} = \frac{1}{4} \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$

$\bar{X} = 1$

$\bar{Y} = 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2}$

$\bar{Y} = \frac{3}{2}$

Donc $Cov(X,Y) = \left(0\times1\times\frac{1}{4} + 1\times1\times0 + 2\times1\times\frac{1}{4} + 0\times2\times0 + 1\times2\times\frac{1}{2} + 2\times2\times0\right) - \left(1\times\frac{3}{2}\right)$

$$\boxed{Cov(X,Y) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0}$$

- On a : $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4}$;

$P(X=0)\times P(Y=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$.

Donc $\underline{P(X=0, Y=1) \neq P(X=0)\times P(Y=1)}$ $\Rightarrow$ X et Y ne sont pas indépendantes

2- Calculons $E(Y/X\neq2)$.

On a : $P(Y=y_i/X\neq2) = \dfrac{P(Y=y_i, X\neq2)}{P(X\neq2)}$.

Or $P(X\neq2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

La loi est donc donnée par :

$Y = y_i$	1	2
$P(Y=y_i/X\neq2)$	$\dfrac{\frac{1}{4}+0}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{0+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$

Donc $E(Y/X\neq2) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{2}{3}$

$$\boxed{E(Y/X\neq2) = \frac{5}{3}}$$

3- Déterminons la loi de $Z = X + Y$ et calculons $V(Z)$.

$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

La loi de Z est donc :

$Z = z_i$	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	1/4	0	$\frac{3}{4}$	0

$E(Z) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{3}{4} + 4 \times 0 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$E(Z^2) = (1)^2 \times \frac{1}{4} + (2)^2 \times 0 + (3)^2 \times \frac{3}{4} + (4)^2 \times 0 = \frac{28}{4} = 7.$

Donc $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$= 7 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\boxed{V(Z) = \frac{3}{4}}$

CamScanner

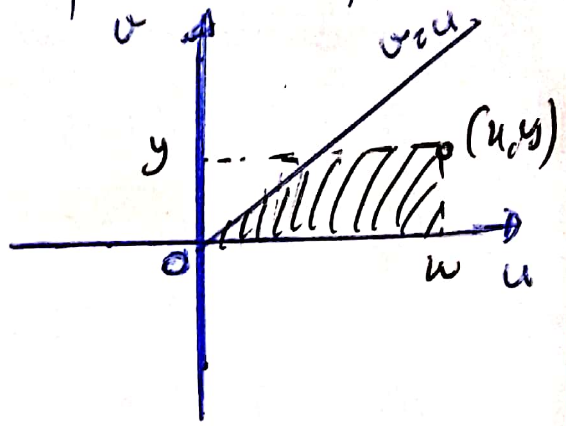
Exercice 3

1. Déterminons la fct de répartition de $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Elle est définie par $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$.

Trouvons le domaine de définition de $f(u,v)$.

On constate que :



- si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$.

$F(x,y) = 0$ car $f(u,v) = 0$

- si $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

* $y \leq x$

Le domaine dans ce cas est l'aire de ce trapèze.

On a alors $0 \leq v \leq y$ et $v \leq u \leq x$

Donc $F(x,y) = \int_{v}^{x}\int_{0}^{y} 2e^{-u-v}\,du\,dv$

$= \int_{0}^{y}\left(\int_{v}^{x} 2e^{-u-v}\,du\right)dv$

$= \int_{0}^{y}\left[2e^{-v} \times (-e^{-u})\right]_{v}^{x} dv$

$= \int_{0}^{y} 2e^{-2v} - 2e^{-v} \cdot e^{-x}\,dv$

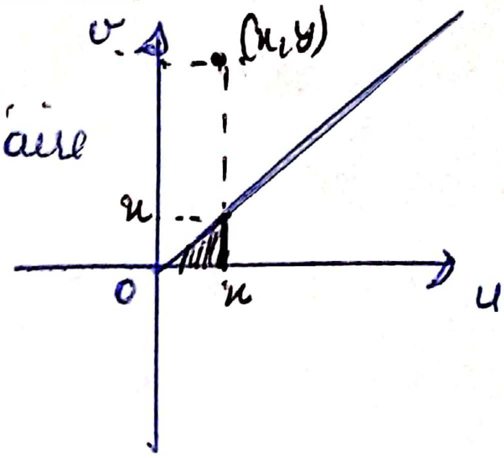
$$F(x,y) = \left[-e^{-2v} + 2e^{-x} e^{-v} \right]_0^y$$

$$= -e^{-2y} + 2e^{-x-y} + 1 - 2e^{-x}$$

$$\boxed{F(x,y) = 1 - 2e^{-x} - e^{-2y} + 2e^{-x-y}}$$

* $x \leq y$

Le domaine étudié est l'aire du triangle hachuré



On a donc $0 \leq u \leq x$ et

$u \leq v \leq x$.

Donc $F(x,y) = \int_0^x \int_u^x 2e^{-u-v} \, du \, dv$

$$= \int_0^x \left[2e^{-u} \cdot (-e^{-v}) \right]_u^x du$$

$$= \int_0^x 2e^{-2u} - 2e^{-u} \cdot e^{-x} \, du$$

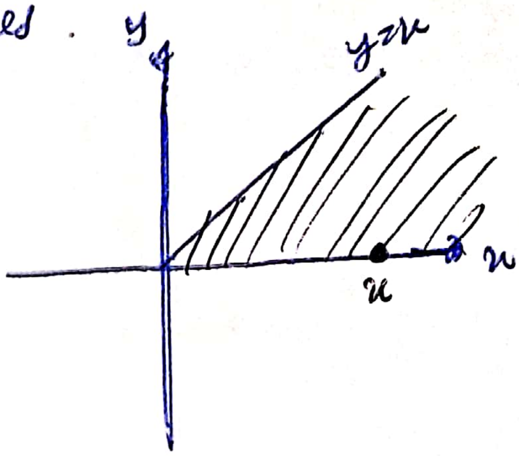
$$= \left[-e^{-2u} + 2e^{-x} \cdot e^{-u} \right]_0^x$$

$$= -e^{-2x} + 2e^{-2x} + 1 - 2e^{-x}$$

$$\boxed{F(x,y) = 1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}$$

D'où $F(x,y) = \begin{cases} 1-2e^{-x}-e^{-2y}+2e^{-x-y} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 1-2e^{-x}+e^{-2x} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3- Trouvons les densités marginales.



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^x 2e^{-x-y}\,dy$$

$$= \left[2e^{-x}\cdot(-e^{-y})\right]_0^x$$

$$\boxed{f_X(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-x}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_y^{+\infty} 2e^{-x-y}\,dx$$

$$= \left[2e^{-y}\cdot(-e^{-x})\right]_y^{+\infty}$$

$$\boxed{f_Y(y) = 2e^{-2y}}$$

Comme $f_X(x) \times f_Y(y) \neq f(x,y)$, les variables X, Y ne sont pas indépendantes.